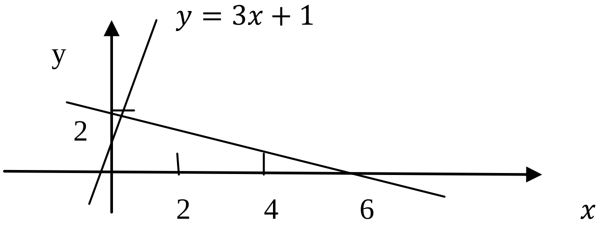
Lekcja 19.12.2020. Powtórzenie. semestr II F

Funkcja liniowa.

1. Narysuj wykres funkcji $y = -\frac{1}{3}x + 2$ oraz wyznacz wzór funkcji do niej prostopadłej i przechodzącej przez punkt $A = (1; 4)$.

$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad dla\ x = 0\ \ y = 2 \quad dla\ y = 0 \ \ \rightarrow\ \ 0 = -\frac{1}{3}x + 2 \ \ \rightarrow\ \ \frac{1}{3}x = 2 \ \ \rightarrow x = 6$$



Prostopadła do $y = -\frac{1}{3}x + 2$ i przechodząca przez $A = (1; 4)$. $\rightarrow$ $y = ax + b$ $\rightarrow a = 3$

$y = 3x + b \quad \rightarrow \quad 4 = 3 \cdot 1 + b \quad \rightarrow \quad 4 - 3 = b \quad \rightarrow b = 1 \quad \rightarrow \quad y = 3x + 1$

2. Wyznacz miejsca przecięcia linii $4x + 2y - 6 = 0$ z osiami układu współrzędnych i wyznacz wzór linii do niej równoległej przechodzącej przez punkt $A = (3; 1)$.

$4x + 2y - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 2y = -4x + 6 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3$

Prosta równoległa $y = ax + b \quad \rightarrow a = -2 \quad \rightarrow \quad y = -2x + b \quad \rightarrow \quad 1 = -2 \cdot 3 + b$

$$1 = -6 + b \quad \rightarrow \quad b = 7 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 7$$

3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty $A = (4; 7)\ i\ \ B = (9; 12)$ oraz współrzędne punktu przecięcia się tej linii z prostą $y = -\frac{1}{2}x + 9$

$y = ax + b \ \ \rightarrow \begin{cases} 12 = 9a + b \\ 7 = 4a + b \end{cases}$ odejmujemy stronami:

$12 - 7 = 9a - 4a \quad \rightarrow \quad 5 = 5a \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \rightarrow \quad 12 = 9 \cdot 1 + b \quad \rightarrow \quad 12 - 9 = b \quad \rightarrow$

$b = 3 \quad \rightarrow \quad y = x + 3$

Obliczamy współrzędną punktu przecięcia się tych prostych:

$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases}$ porównujemy strony lewe: $x + 3 = -\frac{1}{2}x + 9$

$x + \frac{1}{2}x = 9 - 3 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}x = 6 \quad \rightarrow \quad 3x = 12 \quad \rightarrow x = 4 \quad \rightarrow \quad y = 4 + 3 = 7 \ \ \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$

4. Dla jakiego m funkcja $y = (m - 1)x + 5$ jest rosnąca, malejąca i stała?

Funkcja jest rosnąca dla $x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$

Funkcja jest malejąca dla $x - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad x < 1$

Funkcja jest stała dla $x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad wówczas\ y = 5$

Kąty i trójkąty.

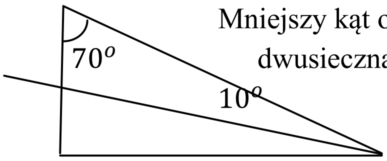
1. Jeśli jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego wynosi 30^o, to ile stopni wynosi drugi kąt ostry?

$$\propto +30^o = 90^o \quad \rightarrow \quad \alpha = 60^o$$

2. Jaka jest długość przyprostokątnych, w trójkącie równoramiennym, gdy przeciwprostokątna wynosi 16cm?

$$c = 16 \quad \rightarrow \quad a\sqrt{2} = 16 \ \backslash\cdot\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 2a = 16\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = 8\sqrt{2}$$

3. Dwusieczna kąta ostrego trójkąta prostokątnego przecina krótszą przyprostokątną pod kątami $\propto\ i\ \beta$.Drugi kąt ostry w tym trójkącie ma miarę 70^o. Wyznacz kąty $\alpha\ i\beta$.



Mniejszy kąt ostry ma $90^o - 70^o = 20^o$

dwusieczna podzieliła ten kąt na dwa równe kąty po $10^o\ każdy$

Mamy więc dla górnego trójkąta:

$$\alpha + 70^o + 10^o = 180^o \quad \rightarrow \quad \alpha + 80^o = 180^o \quad \rightarrow \quad \alpha = 100^o$$

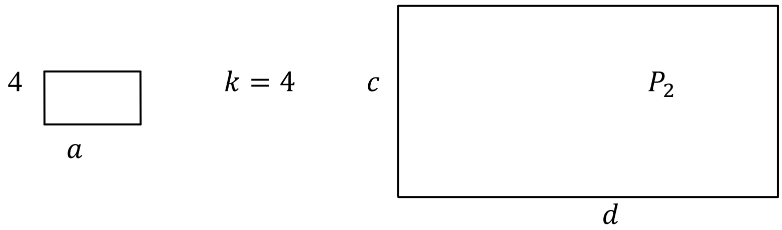
Dla trójkąta dolnego:

$$\beta + 90^o + 10^o = 180^o \quad \rightarrow \quad \beta + 100^o = 180^o \quad \rightarrow \quad \beta = 80^o$$

4. Suma pól dwóch prostokątów podobnych wynosi $340cm^2$, a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdego prostokąta, oraz ich obwody, wiedząc, że jeden z boków mniejszego prostokąta wynosi 4cm.

$$P_2 = k^2 \cdot P_1 \quad \rightarrow \quad P_1 + P_2 = 340 \quad \rightarrow \quad P_1 + 4^2 \cdot P_1 = 340 \quad \rightarrow \quad P_1 + 16P_1 = 340$$

$$17P_1 = 340 \quad \rightarrow \quad P_1 = \frac{340}{17} = 20 \quad \rightarrow \quad P_2 = 340 - 20 = 320$$

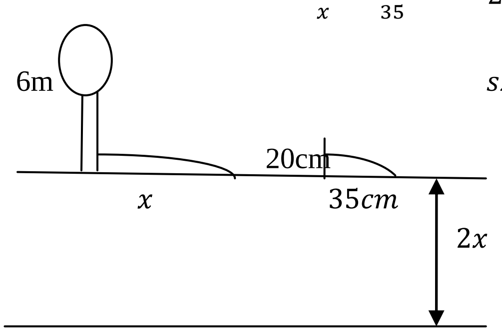


$$4 \cdot a = 20 \quad \rightarrow a = 5 \qquad\qquad c = 4 \cdot 4 = 16 \qquad d = 5 \cdot 4 = 20$$

$$Obw._1 = 4 + 4 + 5 + 5 = 18 \qquad\qquad Obw_2 = 16 + 16 + 20 + 20 = 72$$

5. Stojące na brzegu rzeki drzewo o wysokości 6 metrów rzuca cień równy połowie szerokości rzeki. W tym samym czasie patyk o wysokości 20 cm rzuca cień o długości 35cm. Jaka jest szerokość rzeki?

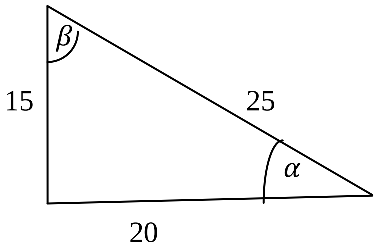
$$\frac{600}{x} = \frac{20}{35} \qquad 20x = 600 \cdot 35 \quad \rightarrow \quad x = 1050cm = 10{,}5m$$



$$szer.rzeki = 2x = 2 \cdot 10{,}5 = 21m$$

Trygonometria.

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, o podanych bokach: 15; 20; 25.

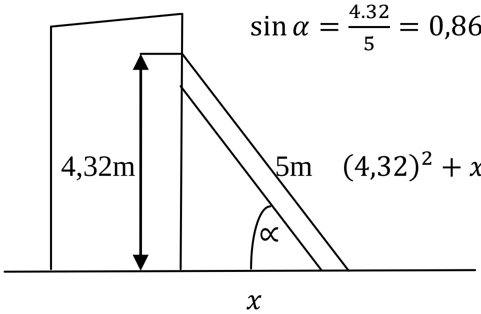


$\sin\alpha = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$

$\sin\beta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ $\cos\beta = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ $\operatorname{ctg}\beta = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

2. Drabina o długości 5m oparta o ścianę sięga na wysokość około 4,32m. Jaki kąt tworzy ta drabina z ziemią? W jakiej odległości jest ta drabina od budynku?

$\sin\alpha = \frac{4.32}{5} = 0{,}864 \qquad \propto\approx 60^o$



$(4{,}32)^2 + x^2 = 5^2 \quad \rightarrow \quad x \approx 2{,}5$

3. Jeśli tg∝= $\frac{15}{8}$, to ile wynosi sin∝ ?

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto} = \frac{15}{8} \quad \rightarrow \quad 15cos\alpha = 8sin\alpha \quad \rightarrow \quad cos\alpha = \frac{8}{15}sin\alpha$$

$$sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \quad \rightarrow \quad sin^2\alpha + \left(\frac{8}{15}sin\alpha\right)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad sin^2\alpha + \frac{64}{225}sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{289}{225}sin^2 \propto = 1 \quad \rightarrow \quad sin^2\alpha = \frac{225}{289} \quad \rightarrow \quad sin\alpha = \frac{15}{17}$$

4. Oblicz: $\frac{\sin 135^o - \cos 150^o}{\sin 120^o + \sin 135^o}$

$$sin135^o = sin(180^o - 45^o) = sin45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos150^0 = cos(180^o - 30^o) = -cos30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin120^o = sin(180^o - 60^o) = sin60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sin 135^o - \cos 150^o}{\sin 120^o + \sin 135^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}} = 1$$

ĆWICZENIE: Oblicz: $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ $dla \quad tg \propto = 2$

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha): cos\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha): cos \propto} = \frac{\frac{sin \propto}{cos \propto} + \frac{cos \propto}{cos \propto}}{\frac{sin \propto}{cos \propto} - \frac{cos \propto}{cos \propto}} = \frac{tg \propto +1}{tg \propto -1} = \frac{2+1}{2-1} = 3$$