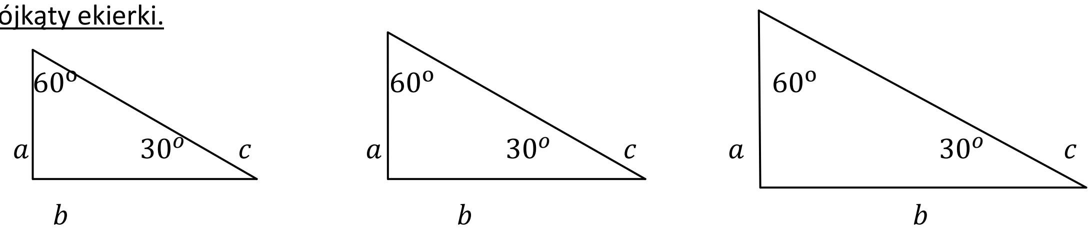
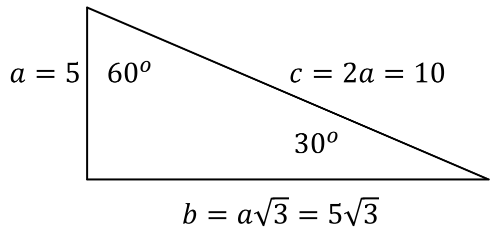
Lekcja 05.12.2020. TRYGONOMETRIA. semestr II F

Trójkąty ekierki.





$czyli$: $a = 2$ to $b = 2\sqrt{3}$ $c = 4$

$a = 3$ to $b = 3\sqrt{3}$ $c = 6$

$a = 4$ to $b = 4\sqrt{3}$ $c = 8$

We wszystkich trójkątach zachodzi zależność:

$$\frac{a}{c} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{wniosek}: \ \frac{a}{c} = jest\ stały\ dla\ takiego\ samegą\ kąta = \boldsymbol{sinus}$$

$\sin 30^o = \frac{1}{2}$

Jeśli kąt $\boldsymbol{\alpha}$ będzie inny, to ułamek będzie inny, ale zawsze $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} < 1$

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{wniosek}: \ \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = jest\ stały\ dla\ takiego\ samego\ kat = \boldsymbol{kosinus}$$

$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Jeśli kąt $\boldsymbol{\alpha}$ będzie inny, to ułamek będzie inny, ale zawsze $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} < 1$

Jeżeli porównamy boki tworzące kąt prosty, to:

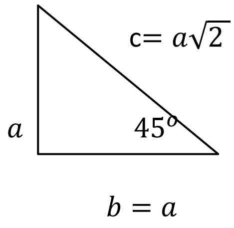
$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{jest stały dla takiego samego kąta} = \textbf{tangens}$$

$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $jeśli\ przyprostokątne\ porównamy\ odwrotnie$: $\frac{b}{a} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{kotangens}$

$ctg30^o = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Mamy 4 funkcje trygonometryczne kąta α: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$

Sprawdźmy teraz jak wyglądają te funkcje dla trójkąta prostokątnego równoramiennego.



$$sin45^o = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45^o = \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^o = ctg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

Dla dowolnego kąta
$\boldsymbol{\alpha}$ *zachodzi związek*: $\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ ***jedynka trygonometryczna***

Dla dowolnego kąta $\boldsymbol{\alpha}$ *zachodzi związek* $\frac{sin\propto}{cos\propto} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha$

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}}$$

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{0^o}$	$\boldsymbol{30^o}$	$\boldsymbol{45^o}$	$\boldsymbol{60^o}$	$\boldsymbol{90^0}$
sin $\boldsymbol{\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos $\boldsymbol{\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg $\boldsymbol{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*nie ma*
ctg $\boldsymbol{\alpha}$	*nie ma*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Jeśli kąt $\propto$ jest większy od 90^o, ale mniejszy od 180^o, *czyli dla* $\propto$: $90^o < \propto < 180^0$,

wartości funkcji trygonometrycznych oblicza się według wzorów redukcyjnych, przy czym funkcja sinus jest dodatnia, a pozostałe funkcje są ujemne.

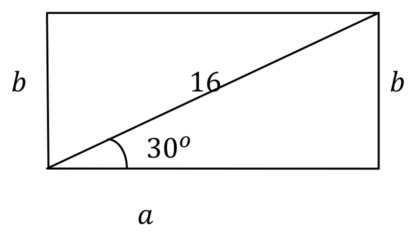
$\sin(180^o - \propto) = \sin \propto$

$$\cos(180^0 - \propto) = -\cos \propto$$

$$tg(180^o - \propto) = -tg \propto$$

$$ctg(180^o - \propto) = -ctg \propto$$

Zad.1. Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna długości 15cm jest nachylona do dłuższego boku pod kątem 30^o.



$\frac{b}{16} = sin30^o \quad \rightarrow \quad \frac{b}{16} = \frac{1}{2} \qquad 2b = 16 \qquad b = 8$

$$\frac{a}{16} = cos30^o \quad \rightarrow \quad \frac{a}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2a = 16\sqrt{3} \qquad a = 8\sqrt{3} \quad lub \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

$a^2 + 8^2 = 16^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 256 - 64 \qquad a^2 = 192 \qquad a^2 = \sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$

$$Obw. = 8\sqrt{3} + 8 + 16 = 24 + 8\sqrt{3}$$

Zad.2. Oblicz: $\sin 135^o \cdot \cos 150^o$

$\sin 135^o = \sin(180^o - 45^o) = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 150^o = \cos(180^o - 30^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

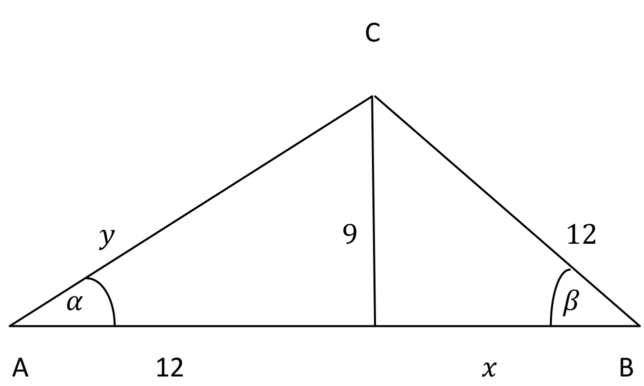
$\sin 135^o \cdot \cos 150^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

Zad.3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego $\propto$, jeśli $\sin \propto = \frac{3}{5}$.

$\sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \qquad cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \quad cos^2 \propto = \frac{16}{25} \qquad cos \propto = \frac{4}{5}$

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \qquad ctg \propto = \frac{cos \propto}{sin \propto} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

ĆWICZENIE 1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC i jego obwód.



ĆWICZENIE 2. Oblicz: $\frac{tg150^o - tg120^o}{sin120^o}$